113 學年度分科測驗
數學甲考科非選擇題評分原則

數學甲考科的題型有選擇、選填與混合題（含非選擇題）、非選擇題。113 學年度分科測驗數學甲考科的非選擇題共有 5 題，包含第 12、13、14、16、17 題。其中第 12、13、14、16 題為 4 分；第 17 題題為 6 分，總計 22 分。

非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若能清楚表達如何依據正確題設進行推論，並詳細說明解題過程，但最後未求出正確答案，會依據解題概念的完整性，酌給部分分數。若未能依據正確題設進行推論，或未能詳細說明解題過程，則不予給分。例如沒有解題過程；或利用錯誤推論；或使用不符合題設的數據作答，均不給分。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 9 月 18 日出刊的第 344 期《選才電子報》。

113 學年度分科測驗數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第 12 題

一、滿分參考答案：

【法一】利用三平面交點

三直線 L_1、L_2、L_3 的共同交點即為三個平面 E_1、E_2、E_3 的共同交點。

考慮方程組 $\begin{cases} x+y+z=7 \cdots\cdots \text{(I)} \\ x-y+z=3 \cdots\cdots \text{(II)} \\ x-y-z=-5 \cdots\cdots \text{(III)} \end{cases}$，

由 $\text{(I)}+\text{(III)}$ 得 $x=1$， $\text{(I)}-\text{(II)}$ 得 $y=2$， $\text{(II)}-\text{(III)}$ 得 $z=4$，

故交點 P 的坐標為 $(1,2,4)$。

【法二】利用直線參數式

因為 E_1 與 E_2 相交的直線為 L_3 ，直線 L_3 的一個方向向量為 $\overrightarrow{w}$

$=(1,1,1)\times(1,-1,1)=(2,0,-2)$ 。

取 $\overrightarrow{v3}=\frac{1}{2}\overrightarrow{w}=(1,0,-1)$ ，因為 $Q(5,2,0)$ 為 L_3 上一點， L_3 的參數式為 $L_3:\begin{cases}x=5+t\\y=2\\z=-t\end{cases}$ 。

若三直線 L_1 、 L_2 、 L_3 有共同的交點 P，則 P 是 L_3 和 E_3 的交點。

令 $P(5+t_0,2,-t_0)$ ，因為 P 是 E_3 上的點，推得 $(5+t_0)-2-(-t_0)=-5$ ，即 $t_0=-4$ 。

故交點 P 的坐標為 $(1,2,4)$ 。

二、評分原則：

正確計算得到交點 P 的坐標為 $(1,2,4)$ ，且有正確的解題過程。

第 13 題

一、滿分參考答案：

因為 E_2 與 E_3 相交的直線為 L_1 ，直線 L_1 的一個方向向量為 $\overrightarrow{w}$

$=(1,-1,1)\times(1,-1,-1)=(2,2,0)$ 。

$\overrightarrow{v1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{w}=(1,1,0)$ 也會是直線 L_1 的一個方向向量。（或取 L_1 上異於 P 的一點

$Q(2,3,4)$ ，可得 L_1 的一個方向向量 $\overrightarrow{PQ}=(1,1,0)$ ）。

同理可得 $\overrightarrow{v2}=(0,1,-1)$ ， $\overrightarrow{v3}=(1,0,-1)$ 分別為直線 L_2 和 L_3 的一個方向向量。

由題意 L_1 與 L_2 所夾的銳角為 α ， L_2 與 L_3 所夾的銳角為 β ， L_3 與 L_1 所夾的銳角為 γ ，

可推得 $\cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}\right|}{\left|\overrightarrow{v_1}\right|\times\left|\overrightarrow{v_2}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$$\cos\beta=\frac{\left|\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_3}\right|}{\left|\overrightarrow{v_2}\right|\times\left|\overrightarrow{v_3}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\gamma = \frac{\left|\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_3}\right|}{\left|\overrightarrow{v_1}\right|\times\left|\overrightarrow{v_3}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

故$\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$。

二、評分原則：

正確計算得到直線L_1,L_2,L_3的方向向量，並利用向量內積除以向量長度求得$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$的值皆為$\frac{1}{2}$，以說明$L_1$、$L_2$、$L_3$中，任兩直線所夾的銳角皆為$60^\circ$。

第 14 題

一、滿分參考答案：

由L_1、L_2、L_3的方向向量$\overrightarrow{v1}=(1,1,0)$、$\overrightarrow{v2}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{v3}=(1,0,-1)$兩兩間的夾角均為$60^\circ$。故在$L_1$、$L_2$、$L_3$上分別取點$A(7,8,4)$、$B(1,8,-2)$、$C(7,2,-2)$使得：

$$\overrightarrow{PA}=6\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)=(6,6,0)$$

$$\overrightarrow{PB}=6\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)=(0,6,-6)$$

$$\overrightarrow{PC}=6\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)=(6,0,-6)\text{，}$$

則$PABC$會是一個邊長為$6\sqrt{2}$的正四面體。

同理在L_1、L_2、L_3上分別取點$A'(-5,-4,4)$、$B'(1,-4,10)$、$C'(-5,2,10)$使得

$\overrightarrow{PA'}=-\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB'}=-\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC'}=-\overrightarrow{PC}$，則$PA'B'C'$也會是一個邊長為$6\sqrt{2}$的正四面體。

1．以下提供兩種方法求過 A、B、C(A' 、 B' 、 C')三點的平面 E_4 之法向量：

【法一】

由 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}=(-6,0,-6)$ 、 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}=(0,-6,-6)$ ，

可得 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-6,0,-6)\times(0,-6,-6)=36(-1,-1,1)=36(1,1,-1)$ 。

故 $(1,1,-1)$ 為 E_4 的其中一個法向量。

【法二】

由 $PABC$ 是一個正四面體，ABC 是一個正三角形。

且若 H 為三角形 ABC 的重心，則 $\overrightarrow{PH}$ 會是過 A、B、C 三點的平面之法向量。因為 $\overrightarrow{PH}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=(4,4,-4)=4(1,1,-1)$ ，故 $(1,1,-1)$ 為 E_4 的其中一個法向量。

2．因法向量為 $(1,1,-1)$ ，可令 $E_4: x+y-z=c$ ，以下提供兩種方法求出 E_4 的方程式：

【法一】

若 E_4 通過點 $A(7,8,4)$ ， E_4 的方程式為 $x+y-z=11$ 。

同理當 E_4 通過點 $A'(-5,-4,4)$ ， E_4 的方程式為 $x+y-z=-13$ 。

【法二】

點 P 到平面 E_4 的距離 $d(P,E_4)$ 即為正四面體 $PABC$ 以三角形 ABC 為底面的高。故

$d(P,E_4)=6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=4\sqrt{3}=\frac{|1+2-4-c|}{\sqrt{3}}$ ， $1+c=\pm 12$ ， $c=11,-13$ 。

推得 $E_4: x+y-z=11$ 或 $E_4: x+y-z=-13$ 。

二、評分原則：

正確計算得 E_4 法向量及其平面方程式，且有正確的解題過程。

第 16 題

一、滿分參考答案：

1. 由 $f(1)=1^3-9\times1^2+15\times1-4=3$ ，可知 $P(1,3)$ 為 Γ 上之一點。
2. 由 $f'(1)=3\times1^2-18\times1+15=0$ ，推得 Γ 在 P 點的切線 L 的方程式為 $y-3=0(x-1)$ ，即 $y=3$ 。

二、評分原則：

1. 正確計算得 $f(1)=3$ 以說明 $P(1,3)$ 為 Γ 上之一點。
2. 正確計算在 P 點的切線斜率為 $f'(1)=0$，再由切線斜率與切點坐標求得切線 L 的方程式。

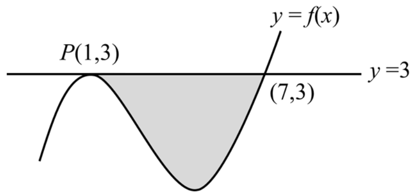
第 17 題

一、滿分參考答案：

若 (a,b) 為 Γ 和 L 圖形的交點，則 $a^3-9a^2+15a-4=b=3$ ，化簡解得 $a=1$ 或 $a=7$ ，故 Γ 和 L 圖形有兩交點為 $(1,3)$ 、$(7,3)$ 。

由 $f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$ ，當 $1\le x\le 7$ 時，Γ 的圖形在 L 的下方，

故 Γ 和 L 所圍成有界區域的面積為 $\int_1^7\left(3-f(x)\right)dx$



$=\int_1^7(7-15x+9x^2-x^3)\,dx$

$=\left(7x-\frac{15}{2}x^2+3x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^7 \quad =7(7-1)-\frac{15}{2}(7^2-1)+3(7^3-1)-\frac{1}{4}(7^4-1)$

$=108$

二、評分原則：

正確解出 Γ 和 L 圖形的交點，並正確算出 Γ 和 L 所圍成有界區域的面積，且有正確的解題過程。